二つの chain から生成される free modular lattice

岩　本　義　和

我々はこの note において $a>b>c$ と $d>e$ 及び $a>b>c$ と $d>e>f$ とから生成される free modular lattice について論ずる。

定　義　1.　"lattice" とは $x+y$ を x と y との上限，$x \cdot y$ を x と y との下限と定義するとき，その要素間に次の条件をみたす system である。

L_1　　$x+x=x$　及び　$x \cdot x=x$

L_2　　$x+y=y+x$　及び　$x \cdot y=y \cdot x$

L_3　　$x+(y+z)=(x+y)+z$　及び　$x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$

L_4　　$x+(x \cdot y)=x$　及び　$x \cdot (x+y)=x$

定　義　2.　"modular lattie" とはその要素間に L_1 から L_4 までの条件をみたし，尚次の条件を備えている system である。

L_5　　もし $x \leqq z$ ならば $x+(y \cdot z)=(x+y) \cdot z$

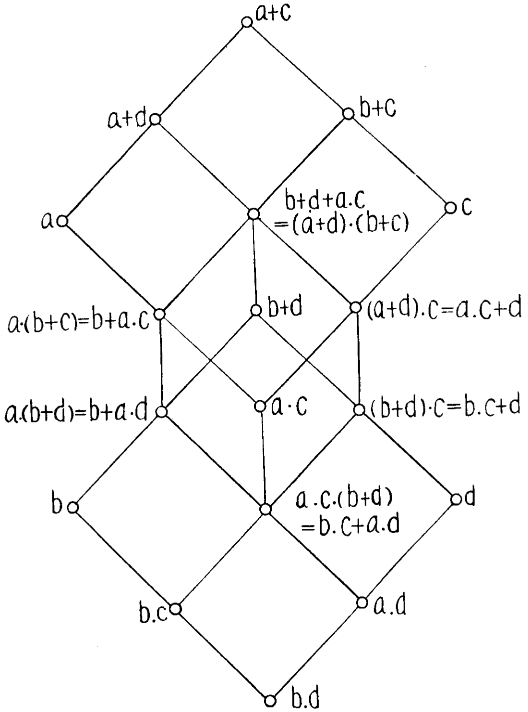
定　理　1.　$a>b$ と $c>d$ とから生成される free modular lattice は 18 の要素を持ち，その構造は図 1 に示されるものである。*

定　理　2.　$a>b>c$ と $d>e$ とから生成される free modular lattice は 33 の要素を持ち，その構造は図 2 に示されるものである。

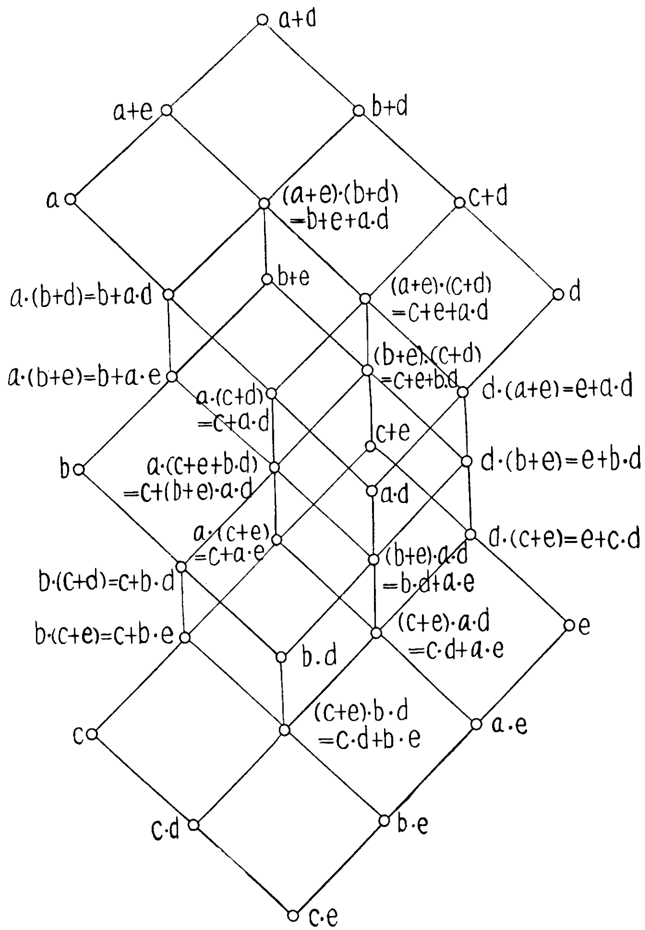
証　明　図 2 の集合が modular lattice の条件 L_1 から L_5 までをみたして作られていることは容易にわかるから，こゝには証明の一部を示すに止める。集合が 33 以上の要素を持ち得ないこと及び他の証明は読者で確かめられ

* Garrett, Birkhoff, Lattice Theory, (1940).

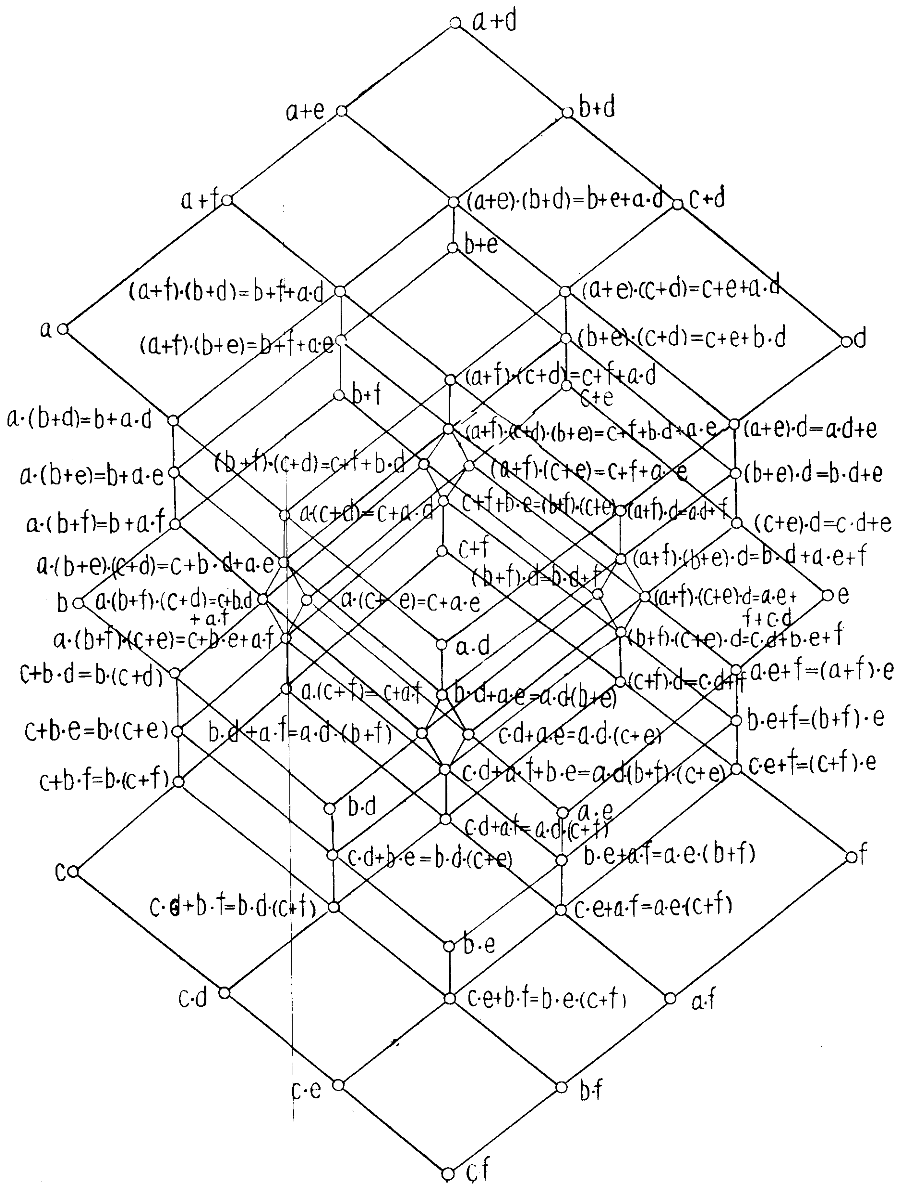
第 1 図


a+c
a+d
b+c
a
c
b+d+a.c
=(a+d)·(b+c)
a·(b+c)=b+a.c
b+d
(a+d).c=a.c+d
a(b+d)=b+a·d
a·c
(b+d)·c=b.c+d
b
d
a.c.(b+d)
=b.c+a.d
b.c
a.d
b.d

第 2 図


a+d
a+e
b+d
a
(a+e)·(b+d)
=b+e+a·d
c+d
d
a·(b+d)=b+a·d
b+e
(a+e)·(c+d)
=c+e+a·d
a·(b+e)=b+a·e
(b+e)·(c+d)
=c+e+b.d
d·(a+e)=e+a·d
a·(c+d)
=c+a·d
c+e
b
a·(c+e+b·d)
=c+(b+e)·a·d
a·d
d·(b+e)=e+b·d
a·(c+e)
=c+a·e
d·(c+e)=e+c·d
(b+e)·a·d
=b·d+a·e
b·(c+d)=c+b·d
e
(c+e)·a·d
=c·d+a·e
b·(c+e)=c+b·e
b.d
c
(c+e)·b·d
=c·d+b·e
a·e
c·d
b·e
c·e

第 3 図


a+d
a+e
b+d
a+f
(a+e)·(b+d)=b+e+a·d
c+d
b+e
a
(a+f)·(b+d)=b+f+a·d
(a+e)·(c+d)=c+e+a·d
d
(a+f)·(b+e)=b+f+a·e
(b+e)·(c+d)=c+e+b·d
b+f
(a+f)·(c+d)=c+f+a·d
c+e
a·(b+d)=b+a·d
(a+e)·d=a·d+e
a·(b+e)=b+a·e
(b+f)·(c+d)=c+f+b·d
(a+f)·(c+e)=c+f+a·e
(b+e)·d=b·d+e
a·(b+f)=b+a·f
a·(c+d)=c+a·d
(c+e)·d=c·d+e
c+f
a·(b+e)·(c+d)=c+b·d+a·e
(b+f)·d=b·d+f
a·(c+e)=c+a·e
e
a·(b+f)·(c+e)=c+b·e+a·f
a·d
c+b·d=b·(c+d)
a·(c+f)=c+a·f
b·d+a·e=a·d·(b+e)
a·e+f=(a+f)·e
c+b·e=b·(c+e)
b·d+a·f=a·d·(b+f)
c·d+a·e=a·d·(c+e)
b·e+f=(b+f)·e
c+b·f=b·(c+f)
c·e+f=(c+f)·e
b·d
a·e
c
c·d+b·e=b·d·(c+e)
b·e+a·f=a·e·(b+f)
f
c·e+a·f=a·e·(c+f)
b·e
c·d
c·e+b·f=b·e·(c+f)
a·f
c·e
b·f
c·f

たい。

modular law L_5 を適用して

$a > b$ であるから　$a\cdot(b+d)=b+a\cdot d$ 及び $a\cdot(b+e)=b+a\cdot e$

$a > c$ であるから　$a\cdot(c+d)=c+a\cdot d$ 及び $a\cdot(c+e)=c+a\cdot e$

$b > c$ であるから　$b\cdot(c+d)=c+b\cdot d$ 及び $b\cdot(c+e)=c+b\cdot e$

$d > e$ であるから　$d\cdot(a+e)=e+a\cdot d$, $d\cdot(b+e)=e+b\cdot d$ 及び

$d\cdot(c+e)=e+c\cdot d$

$b+d > e$ であるから $(b+d)\cdot(a+e)=e+a\cdot(b+d)=e+b+a\cdot d$

$c+d > e$ であるから $(c+d)\cdot(a+e)=e+a\cdot(c+d)=e+c+a\cdot d$ 及び

$(c+d)\cdot(b+e)=e+b\cdot(c+d)=e+c+b\cdot d$

$b+e > c$ であるから $(b+e)\cdot(c+a\cdot d)=c+a\cdot d\cdot(b+e)$, また $a\cdot(c+e+b\cdot d)$

$=a\cdot(b+e)\cdot(c+d)=(b+e)\cdot(c+a\cdot d)=c+a\cdot d\cdot(b+e)$

$d > a\cdot e$ であるから $(b+e)\cdot a\cdot d=(b+a\cdot e)\cdot d=b\cdot d+a\cdot e$ 及び

$(c+e)\cdot a\cdot d=(c+a\cdot e)\cdot d=c\cdot d+a\cdot e$

$d > b\cdot e$ であるから $(c+e)\cdot b\cdot d=(c+b\cdot e)\cdot d=c\cdot d+b\cdot e$

最後に定理 2 と同様の構成によつて我々は次の定理を明らかにすることが出来る。

定　理　3. $a>b>c$ と $d>e>f$ とから生成される free modular lattice は 68 の要素を持ち，その構造は図 3 に示されるものである。