NON-ZERO RATIONAL NUMBER の TANGENT が IRRATIONAL であることの証明

岩　本　義　和

この note の目的は non-zero rational number の tangent が rational ではないことを Ivan Niven の用いた方法* で証明することである。

最初に $\pi/2$ より小さな positive rational number $r=a/b$ を考える。ここに a 及び b は integer である。

いま $\tan r$ が rational と仮定すると $\tan r=p/q$ である二つの integer p 及び q が存在する。

次に　$f(x)=(r-x)^n(r+x)^n b^n q/n!$

とおくと次の等式(1)が成立する。

$$
\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} f(x)\cos x/\cos r\,dx &= \Big[f(x)\sin x/\cos r\Big]_{-r}^{r} \\
&\quad + \Big[f^{(1)}(x)\cos x/\cos r\Big]_{-r}^{r} + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + (-1)^i\Big[f^{(2i)}(x)\sin x/\cos r\Big]_{-r}^{r} \\
&\quad + (-1)^i\Big[f^{(2i+1)}(x)\cos x/\cos r\Big]_{-r}^{r} + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + (-1)^n\Big[f^{(2n)}(x)\sin x/\cos r\Big]_{-r}^{r} \\
&= \{f(r)+f(-r)\}\tan r + \{f^{(1)}(r)-f^{(1)}(-r)\} + \cdots \\
&\quad + (-1)^i\{f^{(2i)}(r)+f^{(2i)}(-r)\}\tan r \\
&\quad + (-1)^i\{f^{(2i+1)}(r)-f^{(2i+1)}(-r)\} + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + (-1)^n\{f^{(2n)}(r)+f^{(2n)}(-r)\}\tan r. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

等式(1)が contradiction を含んでいることは容易にわかる。

(1)の左辺は n が増大すれば zero に近づく positive number である。

一方 $f^{(i)}(x)=\sum_{k=0}^{i}(-1)^{k}\ {}_{i}C_{k}\cdot{}_{n}P_{i-k}\cdot{}_{n}P_{k}(r-x)^{n-k}(r+x)^{n-i+k}\ b^{n}q/n!,$

従って $f^{(i)}(r)=(-1)^{n}\ {}_{i}C_{n}\cdot{}_{n}P_{i-n}(n!)(2r)^{2n-i}\ b^{n}q/n!$

$$=(-1)^{n}\ {}_{i}C_{n}\cdot{}_{n}P_{i-n}(2a)^{2n-i}\ b^{i-n}q,$$

$$f^{(i)}(r)\tan r=(-1)^{n}\ {}_{i}C_{n}\cdot{}_{n}P_{i-n}(2a)^{2n-i}\ b^{i-n}p.$$

こゝに $2n\geqq i\geqq n$ である。

同様の計算で

$$f^{(i)}(-r)=(-1)^{i-n}\ {}_{i}C_{i-n}\cdot{}_{n}P_{i-n}(n!)(2r)^{2n-i}\ b^{n}q/n!$$

$$=(-1)^{i-n}\ {}_{i}C_{i-n}\cdot{}_{n}P_{i-n}(2a)^{2n-i}\ b^{i-n}q,$$

$$f^{(i)}(-r)\tan r=(-1)^{i-n}\ {}_{i}C_{i-n}\cdot{}_{n}P_{i-n}(2a)^{2n-i}\ b^{i-n}p.$$

こゝに $2n\geqq i\geqq n$ である。

上の計算で明らかなように(1)の右辺は常に integer である。このことは $\tan r$ を rational と考えたことによって等式(1)が contradiction を含んでいることを示している。従って $\tan r$ は irrational である。

r が negative のときは $\tan r=-\tan(-r)$ を考えると $\tan(-r)$ は上の証明によって irrational で従って $\tan r$ もirrational である。

また$\cot r=1/\tan r$ より $\cot r$ も irrational である。

---

* 最初 I.Niven が π が irrational であることの簡単な証明法を示した。同じ方法に従って Koksma, Butluski 及び Iwamoto 等が e, e^{s}, log r 及び π^2 の irrational を明らかにした。

(Cf. Journal of the Osaka Institute of Science and Techonology Vol. 1 No.2 November, 1949)